# О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ одной МАКСИМИННОЙ ЗАДАЧИ математичЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Отакулов Салим**
Доктор физико-математических наук, профессор
Джизакский политехнический институт, e-mail: otakulov52@mail.ru,

**Равшанов Ислом Акмал ўғли**
Самаркандский филиал Ташкентского Университета информационных технологий имени Мухаммада Ал-Хоразмий, магистрант

***Аннотация***. *В работе для класса квадратичных функций изучена дискретная максиминная задача математического программирования. Исследованы необходимые и достаточные условия оптимальности.*

***Ключевые слова***: *квадратичная функция, негладкая функция, максиминная задача, условия оптимальности.*

# ON THE METHOD FOR SOLVE ONE MAXIMIN PROBLEM OF MATHEMATICAL PROGRAMMING

***Abstract***. *In the paper for class quadratic functions the discrete maximin problem of mathematical programming is studied. The necessary and sufficient conditions of optimality is researched.*

***Keywords***: *quadratic function, nonsmooth function, maximin problem, conditions of optimality.*

1.Введение. Теория экстремальных задач, являющаяся важным разделом современной математики, имеет широкие приложения к разнообразным задачам оптимизационного характера [1–4]. В становлении и развитии этой теории основополагающими были задачи, идеи и методы таких великих ученых, как И.Кеплер, П.Ферма, Х. Гюйгенс, И.Ньютон, И.Бернулли, Ж.Лагранж, Л. Эйлер, К.Вейерштрасс и др. В настоящее время методами оптимизации воспользуются инженеры-конструкторы, разработчики систем автоматического управления, специалисты по исследованиям операций и многие другие специалисты-прикладники [2–5].
Модели задач оптимизации с негладкими целевыми функционалами составляют отдельный класс в теории экстремальных задач. Одним из подходов, приводимых к негладким задачам оптимизации [6], является принцип минимакса(максимина) [7]. Большой интерес к вариационным задачам с недифференцируемыми функционалами привели к возникновению и развитию математических методов негладкой оптимизации и многозначного анализа [6–9]. Следует отметить, что оптимизация негладких функционалов составляет важный и широкий класс в задачах управления ансамблем траекторий динамических систем [10–13].
Математическое программирование, которое возникло в 30-40 годы прошлого века в результате новых практических задач экономики и техники, имеет многочисленные приложения во всех областях исследований, связанных с вопросами оптимизации [3,4,5]. В математическом программировании большой интерес представляют негладкие функции типа максимума и минимума[8]. Вопросы оптимизация таких функций приводит классу минимаксных и максиминных задач, которые исследуются с применением выпуклого и многозначного анализа [6,8,9].
2.Постановка задачи. Методы исследования.
Экстремальные свойства функций типа максимума и минимума существенно зависят от класса функций, на базе которых они возникают. Учитывая это замечание, мы в данной работе будем изучать

одну дискретную максиминную задачу математического программирования. Рассматриваемую задачу будем сформулировать на базе класса квадратичных функций со многими переменными.

В работе для изучения рассматриваемых функции будем воспользоваться линейной алгеброй конечномерных пространств. Используем векторы $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$, где $R^n-$ $n$-мерное евклидово пространство, $(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$ скалярное произведение векторов $x\in R^n$, $y\in R^n$, $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ –норма(длина) вектора $x\in R^n$.

Одним из широко используемых в практике классов функций многих переменных являются квадратичные функции. Пусть заданы квадратичные функции

$$f_i(x)=\frac{1}{2}(A_i x,x)+(b_i,x)+d_i, i=1,2,...,m, \qquad (1)$$

где $A_i$ – симметрическая $n\times n$-матрица, $b_i\in R^n, d_i\in R^1$, $i=\overline{1,m}$. Введем функцию минимума:

$$\psi(x)=\min_{i=\overline{1,m}} f_i(x)=\min_{i=\overline{1,m}}[\frac{1}{2}(A_i x,x)+(b_i,x)+d_i]. \qquad (2)$$

Рассмотрим задачу максимизации функции (2) на замкнутом множестве $\Omega\subseteq R^n$, т.е. задачу нахождения точки $x^*\in\Omega$, для которой имеет место равенство

$$\psi(x^*)=\psi^*=\sup_{x\in\Omega}\min_{i=\overline{1,m}} f_i(x)=\sup_{x\in\Omega}\min_{i=\overline{1,m}}[\frac{1}{2}(A_i x,x)+(b_i,x)+d_i].$$

Поставленную максиминную задачи обозначим так:

$$\min_{i=\overline{1,m}}[(\frac{1}{2}A_i x,x)+(b_i,x)+d_i]\to\max, x\in\Omega. \qquad (3)$$

Задача (3) относится классу дискретных максиминных задач математического программирования [8,9].

Для разработки метода решения задачи (3) большое значение имеют экстремальные свойства функций типа минимума (2). Свойства этих функций изучаются с использованием методов математического, выпуклого и негладкого анализа. В математическом программировании для разработки численных методов оптимизации необходимо научиться построению направления спуска или подъема целевой функции. Для достижения этой цели будут использованы необходимые и достаточные условия оптимальности.

3. Результаты исследования

Сначала приведем некоторые свойства функции минимума [ 8,14 ].

Свойство 1. Функция минимума вида (2) непрерывна на $R^n$, и она будет вогнутой, если все матрицы $A_i$ – знакоотрицательны ( $A_i\le 0$, т.е. $(A_i x,x)\le 0\quad \forall x\in R^n$ ). А если матрицы $A_i, i=\overline{1,m}$ – отрицательно определены ( $A_i<0$ ,т.е. $(A_i x,x)<0\quad \forall x\ne 0$ ), то функция минимума (2) – строго вогнутая.

Свойство 2. Пусть среды матриц $A_i, i=\overline{1,m}$ есть отрицательно определенная матрица $A_{i^*}$, т.е. $(A_i x,x)<0\ \forall x\ne 0$ и $\Omega$ – замкнутое подмножество $R^n$. Тогда решение задачи (3) существует. Если все матрицы $A_i, i=\overline{1,m}$, отрицательно определены, $\Omega$ – выпуклое и замкнутое множество из $R^n$, то решение задачи (3) единственно.

Функция минимума (2) не обладают свойством дифференцируемости в некоторых точках области определения.

Введем обозначение: $J_*(x)=\{i\in I_m : f_i(x)=\psi(x)\}, I_m=\{1,2,...,m\}$, $x\in R^n$,

где функции $f_i(x)$, $\psi(x)$ определены формулами (1) и (2), соответственно.

Свойство 3. Функция минимума (2) в каждой точке $x^0\in R^n$ имеют производную по произвольному направлению $g\in R^n$, $\|g\|=1$, и справедливо равенство

$$\frac{\partial\varphi(x^0)}{\partial g}=\min_{i\in J_*(x^0)}(A_ix^0+b_i,g). \qquad (4)$$

Используя свойства функции минимума (2) будем разрабатывать метод решения максиминной задачи (3). Предлагаемый метод базируется на необходимых и достаточных условиях оптимальности для задачи (3). Воспользовавщись результатами работ [8,9,14] и принимая во внимание формулу (4), получим следующее необходимое и достаточное оптимальности.

Теорема 1. Пусть точка $x^0 \in \operatorname{int}\Omega$ есть решение максиминной задачи (3). Тогда справедливо неравенство

$$\sup_{\|g\|=1}\min_{i\in J_*(x^0)}(A_ix^0+b_i,g)\le 0. \qquad (5)$$

Если матрицы $A_i, i=\overline{1,m}$ знакоотрицательны и неравенство (5) имеет место при некотором $x^0\in\Omega$, то точка $x^0$ – решение задачи (3).

Если условие (5) не имеет место, то как следует из результатов теории минимакса(максимина)[8], решение задачи (3) сводится к построению направления наискорейшего подъема функции минимума (2).

Рассмотрим множество $H_*(x^0)=\{z: z=-A_ix^0-b_i, i\in J_*(x^0)\}$ и его выпуклую оболочку $L_*(x^0)=coH_*(x^0)$.

Теорема 2. Неравенство (5) эквивалентно соотношению $0\in L_*(x^0)$.

Этот результат следует из общей теории оптимизации функций типа максимума и минимума [8,9].

Пример. Пусть $f_i(x)=-\|x\|^2+(b_i,x)+\|b_i\|^2, i=1,2$, $x=(x_1,x_2)$, $b_1=(\sqrt{2},0), b_2=(0,\sqrt{2})$. Для этой функции рассмотрим максиминную задачу:

$$\min_{i=1,2}[-\|x\|^2+(b_i,x)+\|b_i\|^2]\to\max, \|x\|\le 1. \qquad (6)$$

В нашем примере функция минимума (2) имеет вид:

$$\varphi(x)=-\|x\|^2+2+\min\{\sqrt{2}x_1,\sqrt{2}x_2\}=-\|x\|^2+2+\sqrt{2}\max\{x_1,x_2\}.$$

Рассмотрим точку $x^0=(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}})$. Имеем: $J_*(x^0)=\{1,2\}$,

$$H_*(x^0)=\{z^i=-A_ix^0-b_i, i\in J_*(x^0)\}=\{z^1,z^2\}, z^1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}), z^2=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}});$$

$L_*(x^0)=coH_*(x^0)=\{v: v_1=-v_2, -\frac{1}{\sqrt{2}}\le v_1\le\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Итак, условие $0\in L_*(x^0)$ выполняется. Согласно теоремам 1 и 2 точка $x^0=(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}})$ является решением минимаксной задачи (6).

4. Заключение. В работе для класса квадратичных функций (1) изучены свойства функции минимума и указана формула вычисления производных по направлениям этой функции. Приведены достаточные условия существования и единственности максиминной задачи. Найденные необходимые и достаточные условия оптимальности используют оценку вида (5) для производных по направлениям функции минимума. Предложенный метод решения рассмотренной задачи основывается на проверку условия $0\in L_*(x^0)$. Полученные результаты можно применить для разработки алгоритмов построения оптимального решения в максиминных задач рассмотренного типа.

**Список литературы**

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление . –М.: Наука, 1979. -482с.
2. Афанасьев В.Н., Колмановский В.В., Носов В.В. Математическая теория конструирования систем управления. –М.: Высшая школа, 2003.-614 с.

3. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. –М.: Мир, 1982.-584 с.
4. Малышев В.В. Методы оптимизации в задачах системного анализа и управления. М.: МАИ-ПРИНТ, 2010. - 440 с.
5. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. -М.: Наука ,1982. - 432 с.
6. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука,1988. - 280 с.
7. Кейн В.М. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. М.: Наука, 1982. -248 с.
8. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. –М.: Наука, 1972.-368 с.
9. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. –М.: Наука, 1981. -384 с.
10. Отакулов С. Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений. Монография. Riga, Lambert Academic Publishing, 2019. –144 с.
11. Otakulov S., Rahimov B. Sh., Haydarov T.T. The nonsmoth optimal control problem for ensamble of trajectories of dynamic system under conditions of indeterminacy. Middle European Scientific Bulletin, vol. 5, 2020. pp. 38-42.
12. Otakulov S., Rahimov B. Sh. About the property of controllability an ensamble of trajectories of differential inclusion. International Enjineering Journal for Research & Development. Vol.5, issue 4, 2020. pp.366-374.
13. Otakulov S., Haydarov T.T., Sobirova G. D. On the time optimal control problem for controllable differential inclusion with parameter. Proceedings of Scholastico-2021, International Consortium on Academic Trends of Education and Science, April 2021. London, England. pp. 112-114.
14. Отакулов С., Равшанов И.А. Свойства одного класса функций типа максимума и минимума и их применене к негладким задачам оптимизации. International scientific journal “Science and Innovation”, 2022, № 2. -pp. 60-68.