TENGSIZLIKLARNI HOSILA YORDAMIDA ISBOTLASH USULLARI

Bo‘riboy Fayzullayev,
O‘zMU Jizzax filiali talabasi

Annotasiya
Ushbu maqolada ayrim murakkab tipdagi tengsizliklarni funksiya monotonligi va hosilasidan foydalanib isbotlash usullari berilgan va aniq misollar yordamida ko‘rsatib berilgan.

Kalit so‘zlar: funksiya monotonligi, hosilasi, tengsizliklarni isbotlash.

Matematikada ayrim murakkab tipdagi masalalarni bevosita ishlash yo‘li bilan isbotlash ancha qiyinchilik tug’diradi, ammo funksiya hosilasi, uzluksizligi va funksiya monotonligidan foydalanib isbotlash qulaydir. Murakkab ko‘rinishida berilgan tengsizliklarni hosila yordamida isbotlashda hosilaning tadbiqidan foydalanamiz.

Bizga $[a;\infty)$ oraliqda differensiallanuvchi va monoton o‘suvchi $f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. U holda berilgan oraliqda $f(x) \geq f(a)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Ushbu tasdiqqa ko‘ra bir nechta tengsizliklarni hosila yordamida isbotlashga misollar keltiramiz.

1-misol. $x \geq 0$ oraliqda $x + 1 + \frac{x^2 \cdot e^x}{2} \geq e^x$ tengsizliklarni isbotlang.

Isbot. $x \geq 0$ oraliqda $f(x)=x + 1 + \frac{x^2 \cdot e^x}{2} - e^x$ funksiyani olamiz. $f(x)$ funksiyadan 1- tartibli hosila olamiz:

$$f'(x)= 1 + x \cdot e^x + \frac{x^2 \cdot e^x}{2} - e^x.$$

$f'(x)$ funksiya $[0;\infty)$ oraliqda o‘suvchi.

Yuqoridagi tasdiqqa ko‘ra $f'(x) \geq f'(0) = 0$ o‘rinli.

Bundan esa $x \in [0;\infty)$ oraliqda $f(x) \geq f(0)$ tengsizlik o‘rinliekanligidan

$$1 + x * e^x + \frac{x^2 * e^x}{2} - e^x \geq 0$$

$$1 + x * e^x + \frac{x^2 * e^x}{2} \geq e^x$$

kelib chiqadi. tengsizlik isbotlandi.

2-misol. a,b,c musbat haqiqiy sonlar va ixtiyoriy x,y $(x \geq y \geq 0)$ lar uchun ushbu

$$\frac{a^x}{b^x + c^x} + \frac{b^x}{a^x + c^x} + \frac{c^x}{a^x + b^x} \geq \frac{a^y}{b^y + c^y} + \frac{b^y}{c^y + a^y} + \frac{c^y}{a^y + b^y}$$

tengsizlikni isbotlang.

Isbot. Quyidagi bir o‘zgaruvchili funksiyani qaraymiz.

$$f(t) = \frac{p^t}{q^t + 1} + \frac{q^t}{p^t + 1} + \frac{1}{p^t + q^t}$$

bunda p,q $(p \geq q \geq 1)$ o‘zgarmas son. $f(t)$ funksiyadan t o‘zgaruvchi bo‘yicha 1- tartibli hosila olamiz.

$$f'(t)=\frac{p^t\cdot \ln p(q^t+1)-p^tq^t\ln q}{(q^t+1)^2}+\frac{q^t\ln q(p^t+1)-q^tp^t\ln p}{(p^t+1)^2}+\frac{p^t\cdot \ln p+q^t\ln q}{(p^t+q^t)^2}$$

Bu ifodani soddalashtiramiz:

$$f'(t)=(pq)^t\ln(\frac{p}{q})\left(\frac{1}{(q^t+1)^2}-\frac{1}{(p^t+1)^2}\right)+p^t\ln q\left(\frac{1}{(q^t+1)^2}-\frac{1}{(p^t+q^t)^2}\right)+q^t\ln q\left(\frac{1}{(q^t+1)^2}--\frac{1}{(p^t+1)^2}\right)$$

Bu yerda $p \geq q \geq 1$ bo‘lganligi uchun $f'(t) \geq 0$ va $f(t)$ funksiya o‘suvchi.
Bundan ixtiyoriy x,y $(x \geq y \geq 0)$ lar uchun

$$f(x) \geq f(y)$$

$$\frac{p^x}{q^x+1}+\frac{q^x}{p^x+1}+\frac{1}{p^x+q^x} \geq \frac{p^y}{q^y+1}+\frac{q^y}{p^y+1}+\frac{1}{p^y+q^y}$$

tengsizlik o‘rinli. $(a \geq b \geq c)$ deb olib $p=\frac{a}{b}$, $q=\frac{b}{c}$ almashtirishni olsak

$$\frac{a^x}{b^x+c^x}+\frac{b^x}{a^x+c^x}+\frac{c^x}{a^x+b^x} \geq \frac{a^y}{b^y+c^y}+\frac{b^y}{c^y+a^y}+\frac{c^y}{a^y+b^y}$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

3-misol. $\forall n \geq 3$ va $n \in N$ uchun $(n+1)^n < n^{n+1}$ tengsizlikni isbotlang.

Isbot. $x \in [3;\infty)$ oraliqda $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ funksiya qaraymiz.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}*x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$$

n<n+1 tengsizlikdan va berilgan funksiyaning kamayuvchi ekanligidan

$$f(n) > f(n+1)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. U holda, $\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ tengsizlik kelib chiqadi. Ifodani soddalashtirsak, $(n+1)\ln n > n\ln(n+1)$ yoki $(n+1)^n < (n)^{n+1}$ hosil bo‘ladi. Tengsizlik isbotlandi.

4-misol. $\pi^e < e^\pi$ tengsizlikni isbotlang.

Isbot. $x > 0$ oraliqda $f(x)=\frac{\ln^2 x}{2}$ funksiyani qaraymiz va undan hosila olamiz. $x \geq e$ oraliqda $f'(x)=\frac{\ln x}{x} < 0$ kamayuvchi funksiya va $\pi > e$ ekanligidan $\frac{\ln\pi}{\pi} \leq \frac{\ln e}{e}$ kelib chiqadi. Bundan shakl almashtirishlar yordamida $\pi^e < e^\pi$ kelib chiqadi. Tengsizlik isbotlandi.
Yuqoridagi kabi tengsizliklarni funksiya hosilasi, monotonligidan foydalanib isbotlash bunday tengsizliklarni sodda isbot qilish imkonini beradi.

Adabiyotlar ro‘yxati

1. Alimov Sh., Ashurov R. Matematik analiz. “Mumtoz so‘z” nashriyoti, Toshkent, 2018.
2. Sharipova S., Husanov F., Taylakov M. Matematika jozibasi bo ‘lajak matematika o ‘qituvchilariga parametrli tengsizliklarni tahliliy yechishni o‘rgatish //Журнал математики и информатики. – 2022. – Т. 2. – №. 1.