Mavzu: Giperbolik harakatlar gruppasi.

Mavlonov Elbek Primqul o‘g‘li
Guliston Davlat Universiteti matematika
Yo‘nlishi 2-kurs magistranti

Annotatsiya: Ushbu maqolada giperbolik, giperbolik tekislik, giperbolik tekislikning harakatlar gruppasi, evklid sferasi va evklid sferasi nuqtalar orasidagi sferik masofa formulasi yoritilib berilgan.

Kalit so‘zlar: Giperbolik, giperbolik tekislik, giperbolik tekislikning harakatlar gruppasi, giperbolik polyar korrelyatsiya, evklid sfersi, sferik masofa.

Agar $\sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i x_i$ $(a_{ij} = a_{ji})$ kvadratik forma xosmas $(|a_{ij}| \neq 0)$ bo‘lsa, shunday $x_i = \sum_{k=1}^{3} c_{jk} y_k$, $(|c_{jk}| \neq 0)$ almashtirish topish mumkinki, uni yordamida kvadratik formani $\sum_{i=1}^{3} b_i {y^2}_i$ $(b_i \neq 0)$ ko‘rinishda yozish mumkin. Bu holda b_i koefitsentlardan ikkitasi musbat, bitasi manfiy bo‘lsa, bunday polyar korrelyatsiya *giperbolik* deyiladi.

Ta’rif: P proyekyiv tekislikda E ellips sohani o‘zini o’ziga akslantiruvchi proyektiv almashtirish *giperbolik harakat* deyiladi.

Ma’lumki ixtiyoriy geometriyaning harakatlar gruppasi bu gruppaning aniq tasvirlanishiga bog‘liq emas. Bu holda, giperbolik tekislikning Γ' harakatlar gruppsini aniqlaymiz. Buning uchun bu tekislikni modelini ifodalovchi $E: {x_1}^2 + {y_1}^2 = 1$ birlik aylanadan foydalanamiz. Γ' gruppa E ni o‘ziga o‘tkazuvchi barcha kollineatsiyalardan tuziladi.

E aylananing birjinsli koordinatalardagi tenglamasi $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ k o‘rinishga ega va E ni aniqlovchi giperbolik polyar korrelyatsiyani, ya’ni γ_h ni quyidagi ko‘rinishda yozishimiz mumkin. E orqali γ_h giperbolik polyar korrelyatsiyani aniqlaymiz:

γ_h: $\xi_1 = x_1,\ \xi_2 = x_2,\ \xi_3 = -x_3$

(13.3) teoremaga asosan Γ' gruppa shunday Φ kollineatsiyalardan tuziladiki, ular uchun $\Phi\gamma_h = \gamma_h\Phi$ o‘rinli va (13.4) teoremadagi belgilashlarga asosan Γ' gruppa Γ_{γ_h} gruppa bilan mos tushadi.

Biz Γ_{γ_h} gruppaning elementlarini aniqlaymiz.

Teskarilanuvchi

$$\Phi: x'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k,\quad |a_{ik}| \neq 0, i = \overline{1,3}$$

tangentsial koordinatalarda

$$\Phi^{-1}: \xi_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ki} \xi'_k, \qquad i = \overline{1,3}$$

k o‘rinishga ega b o‘ladi va $\Phi^{-1}\gamma\Phi$ almashtirish

$$\xi_i = a_{1i}\left(\sum_{k=1}^{3} a_{1k} x_k\right) + a_{2i}\left(\sum_{k=1}^{3} a_{2k} x_k\right) - a_{3i}\left(\sum_{k=1}^{3} a_{3k} x_k\right),$$

Ko‘rinishga ega bo‘ladi. $\Phi\gamma = \gamma\Phi$ tenglikdan yoki $\gamma = \Phi^{-1}\gamma\Phi$ dan barcha x_i lar uchun o‘rinli bo‘lgan:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2) + x_2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32}) + \\ \quad + x_3(a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33}) \\ x_2 = x_1(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32}) + x_2(a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2) + \\ \quad + x_3(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33}) \\ x_3 = x_1(a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33}) + x_2(a_{12}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{32}a_{33}) + \\ \quad + x_3(a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2) \end{cases}$$

Tengliklarga ega bo‘lamiz. Bu tengliklardan esa

$a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 = 1,\ a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2 = 1,\ a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 = -1 \quad (*)$

$$a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} - a_{3i}a_{3k} = 0,\quad i,k = \overline{1,3},\quad i \neq k$$

Shartlar kelib chiqadi. (*) tengliklardan $a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 - a_{31}x'_3$ ni x_1, $a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 - a_{32}x'_3$ ni x_2 sifatida olsak Φ^{-1} almashtirish

$$x_1 = a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 - a_{31}x'_3$$
$$\Phi^{-1}:\quad x_2 = a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 - a_{32}x'_3$$
$$x_3 = -a_{13}x'_1 - a_{23}x'_2 + a_{33}x'_3$$

Ko‘rinishga ega bo‘lish kelib chiqadi.

Demak, Γ_h Φ^{-1} ni o‘z ichiga oluvchi gruppani tashkil qiladi. Bulardan quyidagi natijalarni yozish mumkin.

1-natija: Agar $x'_i = \sum_k a_{ik}x_k$ almashtirish (*) shratni qanoatlantirsa $\det(a_{ik}) = 1$ o‘rinli bo‘ladi.

2-natija: γ - $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, $\xi_3 = -x_3$ shartlarni qanoatlantiruvchi polyar korrelyatsiya bo‘lsin. Bu holda Φ kollentsiya Γ_h gruppaga tegishli bo‘ladi faqat va faqat a_{ik} koeffitsentlar uchun (*) o’rinli bo‘lsa, bu yerda Φ ni $x'_i = \sum a_{ik}x_k$ tenglama orqali tasvirlaymiz.

3-natija. Giperbolik tekislik harakatlari gruppasi, ya’ni $\Gamma_{\gamma h}$ quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$x'_i = \sum_k a_{ik}x_k,\quad |a_{ik}| = 1$

$a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 = 1,\quad a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2 = 1,\ a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 = -1$

va $a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} - a_{3i}a_{3k} = 0,\ i,k = \overline{1,3},\ i \neq k$ (**)

shartlarni qanoatlantiruvchi almashtirish bilan bir qiymatli aniqlanadi.

4-natija: $x'_i = \sum_k a_{ik}x_k$ almashtirish $\Omega_\varepsilon(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ formani invariant saqlashi uchun uning koeffitsentlari (*) shartlarni bajarishi zarur va yetarli.

5-natija. $\Gamma_{\gamma h} \cong SO(1,3)$.

Ma’lumki bunday harakat har qanday S_r^2: $\sum_i x_i^2 = r^2$, $r > 0$ evklid sferasini o‘ziga o‘tkazadi. Bu holda S_r^2 sfera nuqtalari orasidagi sferik masofa

$d(x,y) = r\, arccos[r^{-2}\Omega_1(x,y)]$

Formula orqali topiladi.

Foydalanilgan adabiytlar

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.—М.: Наука, 1979.
2. Аминов Ю. А. Дифференциальная геометрия и топология.—М.: Наука, 1987.
3. Арипов Р. Г., Хаджиев Дж. Полная система глобальных дифференциальных и интегральных инвариантов кривой в евклидовой геометрии// Изв. вузов. Мат.—2007.— 542, № 7.— С. 1–14.
4. Гильберт Д. Избранные труды. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики.—М.: Факториал, 1998.
5. Картан Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенная методом подвижного репера.—Волгоград: ПЛАТОН, 1998.
6. Муминов К. К. Эквивалентность путей относительно действия симплектической группы// Изв. вузов. Мат.—2002.—№ 7. —С. 27–38.
7. Муминов К. К., Чилин В. И. Эквивалентность кривых в конечномерных пространствах.— LAP LAMBERT Academic Publ., 2015.
8. Чилин В. И., Муминов К. К. Полная система дифференциальных инвариантов кривой в псевдоевклидовом пространстве// Динам. сист.—2013.— 31, № 3. —С. 135–149.

Internet saytlari:

www.tdpu.uz

www.edu.uz

www.navbil.uz (A.Navoiy nomidagi O’z.MK)