О ПОСТАНОВКЕ И ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

У. Ш. Абдурахмонов
преподаватель Кокандского Государственного Педагогического Института

Аннотация
Настоящая работа посвящена краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной сфере. В статье поднимается и применяется один вопрос. Рассмотрены все случаи треугольной сферы. Одна теорема представлена с доказательством.

Ключевые слова: треугольник, сфера, парабола, уравнение гиперболы, краевая задача, функция, дифференциал, дифференциальное уравнение.

В настоящем сообщении ставится и исследуется одна краевая задача для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0 \qquad (1)$$

в треугольной области G плоскости xOy, где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup J_1\cup J_2\cup J_3$, G_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2 – треугольник с вершинами в точках A, B, $C(1/2,-1/2)$; G_3 – треугольник с вершинами в точках A, $D(-1,1)$, A_0; G_4 – треугольник с вершинами в точках B, $E(2,1)$, B_0; J_1 – открытый отрезок с вершинами в точках A, B; J_2 – открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0; J_3 – открытый отрезок с вершинами в точках B, B_0; $c\in R$,

$$Lu=\begin{cases} u_{xx}-u_y, & (x,y)\in G_1, \\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in G_i \quad (i=2,3,4). \end{cases}$$

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

<u>Задача-1.</u> Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x и u_y – непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u|_{AC}=\psi_1(x),\quad 0\le x\le 1/2, \qquad (2) \qquad\qquad u|_{AF_1}=\psi_2(x),\ -1/2\le x\le 0, \qquad (3)$$

$$u\big|_{BF_2}=\psi_3(x),\ 1\le x\le 3/2, \quad (4) \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AC}=\psi_4(x),\ 0\le x\le 1/2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AF_1}=\psi_5(x),\ -1/2\le x\le 0, \quad (6) \qquad u\big|_{A_0D}=f_1(x),\ -1\le x\le 0, \quad (7)$$

$$u\big|_{B_0E}=f_3(x),\ 1\le x\le 2 \quad (8)$$

и 4) следующим условиям склеивания:

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau_1(x),\ 0\le x\le 1, \quad (9) \qquad u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=\nu_1(x),\ 0\le x\le 1, \quad (10)$$

$$u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=\mu_1(x),\ 0<x<1, \quad (11) \qquad u(+0,y)=u(-0,y)=\tau_2(y),\ 0\le y\le 1, \quad (12)$$

$$u_x(+0,y)=u_x(-0,y)=\nu_2(y),\ 0\le y\le 1, \quad (13) \qquad u_{xx}(+0,y)=u_{xx}(-0,y)=\mu_2(y),\ 0<y<1, \quad (14)$$

$$u(1-0,y)=u(1+0,y)=\tau_3(y),\ 0\le y\le 1, \quad (15) \qquad u_x(1-0,y)=u_x(1+0,y)=\nu_3(y),\ 0\le y\le 1, \quad (16)$$

$$u_{xx}(1-0,y)=u_{xx}(1+0,y)=\mu_3(y),\ 0<y<1. \quad (17)$$

Здесь $\psi_i\,(i=1,2,3,4,5), f_1, f_3$ – заданные достаточно гладкие функции, а $\tau_i, \nu_i, \mu_i\ (i=1,2,3)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x+y=0$ или $x-y=1$, $F_1(-1/2,1/2)$, $F_2(1/2,3/2)$.

В этом сообщении даем краткую идею решения поставленной задачи.

Теорема. Если $\psi_1\in C^3[0,1/2]$, $\psi_2\in C^3[-1/2,0]$, $\psi_3\in C^3[1,3/2]$, $\psi_4\in C^2[0,1/2]$, $\psi_5\in C^2[-1/2,0]$, $f_1\in C^3[-1,0]$, $f_3\in C^3[1,2]$, причем выполняются условия согласования $\psi_1(0)=\psi_2(0)$, $\psi_4(0)=\psi_5(0)$, то задача-1 допускает единственное решение.

Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_1(x-y)e^{-cy},\ (x,y)\in G_1, \quad (18)$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_i(x-y)e^{-cy},\ (x,y)\in G_i\quad (i=2,3,4), \quad (19)$$

где введено обозначение $u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in G_i\ \left(i=\overline{1,4}\right)$, причем $\omega_i(x-y)\left(i=\overline{1,4}\right)-$ неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Сначала рассмотрим область G_2. Записывая решение уравнения (19) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (9) и (10) и удовлетворяя условию (5) после некоторых преобразований, находим функцию $\omega_2(x-y)$.

Подставляя это решение в (2) после некоторых выкладок, имеем первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$.

Переходя в уравнениях (1) и (19) $(i=2)$ к пределу при $y\to 0$, имеем еще две соотношения между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$.

Исключая из этих трех соотношений функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$ после некоторых преобразований, приходим к уравнению

$$\tau_1''(x)-\left(1-\frac{c}{2}\right)\tau_1'(x)-\frac{c}{2}\tau_1(x)=\alpha_2(x)+k_1,\ 0\le x\le 1, \tag{20}$$

где $\alpha_2(x)$ – известная функция, а k_1 – неизвестная пока постоянная.

При решении уравнения (20) могут быть три случая: 1°. $c\ne -2$, $c\ne 0$; 2°. $c=-2$; 3°. $c=0$. В случае 1° характеристическое уравнение уравнения (20) имеет две различные действительные корни: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-\frac{c}{2}$. В случае 2° характеристическое уравнение уравнения (20) имеет один двукратный действительный корень: $\lambda_{1,2}=1$. В случае 3° характеристическое уравнение уравнения (20) имеет две различные действительные корни: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$.

Решая уравнение (20) во всех трех случаях при условиях $\tau_1(0)=\psi_1(0)$, $\tau_1(1)=\psi_3(1)$, $\tau_1'(0)=\frac{1}{2}\psi_1'(0)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(0)$, находим функцию $\tau_1(x)$.

Далее, переходя в области G_3 и G_4 и применяя метод продолжения, удовлетворяя условям $u_{3x}(0,y)=\nu_2(y)$, $u_{4x}(1,y)=\nu_3(y)$, приходим к соотношениям между неизвестными функциями $\tau_2(y)$, $\nu_2(y)$ и $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$ соответственно. Затем переходя в область G_1, записывая решение уравнения (18), удовлетворяющего условиям (9), (12), (15) и удовлетворяя условиям склеивания на линиях изменения типа $x=0$, $x=1$, в силу полученных двух соотношений между функциями $\tau_2(y)$, $\nu_2(y)$ и $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$, принесенных из областей G_3 и G_4, после длинных преобразований и вычислений, получим систему двух интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно неизвестных функций $\tau_2'(y)$ и $\tau_3'(y)$. Решая эту систему, находим функции $\tau_2'(y)$ и $\tau_3'(y)$ и тем самым, и функции $u_1(x,y)$, $u_3(x,y)$, $u_4(x,y)$.

Замечание. Аналогичные задачи для уравнений третьего и четвертого порядков параболо-гиперболического типа рассмотрены в работах [1-6].

Литература

1. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. Дифференц. уравнения, 1986, т.22, №1, с.25-31.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.

3. Мамажанов М., Шерматова Х.М., Мамадалиева Х.Б. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в вогнутой шестиугольной области. Актуальные научные исследования в современном мире. ISCIENCE.IN.UA, Переяслав-Хмельницкий, 2017, вып.2(22), стр. 148-151.
4. Мамажанов М., Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в вогнутой шестиугольной области. Вестник КРАУНЦ, Физ.мат. науки, 2017, №1(17), стр. 14-21.
5. Мамажанов М., Шерматова Ҳ.М., Мукадасов Х. Постановка и метод решения некоторых краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа. Вестник КРАУНЦ. Физ-мат. науки. 2014. № 1 (8). с.7-13.
6. Мамажанов М., Мамажонов С.М. Постановка и метод исследования некоторых краевых задач для одного класса уравнений четвертого порядка параболо-гиперболического типа. Вестник КРАУНЦ. Физ-мат. науки. 2014. № 1 (8). с.14-19.
7. Sh, Abdurakhmanov U. "The main approaches to the formation of the control action in younger schoolchildren in the process of teaching mathematics." INTERNATIONAL JOURNAL OF SOCIAL SCIENCE & INTERDISCIPLINARY RESEARCH ISSN: 2277-3630 Impact factor: 7.429 11.11 (2022): 142-150.
8. Isroilova, Gulnora, and Sh Abdurahimov. "The socio-political activity of the youth of Uzbekistan." International conference on multidisciplinary research and innovative technologies. Vol. 2. 2021.
9. Abdurakhmonovich, Shokosim Abdurahimov. "Informative-Target Analysis." Middle European Scientific Bulletin 22 (2022): 69-71.
10. Abdurakhmonovich, Shokosim Abdurahimov. "Technology of Critical Thinking in Russian Language and Literature Lessons in 5-6 Grades." Middle European Scientific Bulletin 22 (2022): 64-68.
11. Shoqosim o‘g‘li, Abduraxmonov Umidjon. "The importance of didactic games in teaching mathematics in secondary schools." Web of Scientist: International Scientific Research Journal 3.6 (2022): 1566-1570.
12. Абдурахманов, Умиджон, Ормоной Тошматова, and Хуснида Мелиева. "Umumta’lim maktablarida matematika fanini o ‘qitishning zamonaviy didaktik vositalari va muammoli ta’lim texnologiyasi." Общество и инновации 3.3/S (2022): 231-238.
13. Shoqosim o‘g‘li, Abdurahmonov Umidjon, Meliyeva Xusnida Xafizaliyevna, and G‘ofurov To‘lqinjon. "MODERN DIDACTIC MEANS OF TEACHING MATHEMATICS IN SECONDARY SCHOOLS AND PROBLEM EDUCATIONAL TECHNOLOGY." Galaxy International Interdisciplinary Research Journal 10.4 (2022): 460-467.