

ПРОЕКТОРОВ КОНЕЧНОМЕРНЫХ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР

Нуриллаев М. Э.

доцент ТГПУ им. Низами.

Казибеков К. М.

магистр ТГПУ им. Низами.

nurillaev_muzaffar@mail.ru

Пусть $B(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих комплексном (или вещественном) гильбертовом пространстве H . Оператор $f: H \rightarrow H$ называется *проектором*, если $f^* = f$ и $f^2 = f$. В дальнейшем рассмотрим частные случаи, когда $H = \mathbb{C}^2$ или $H = \mathbb{R}^2$. Известно, что всякий линейный оператор в конечномерном пространстве единственным образом определяется квадратной матрицей. В комплексном случае имеем.

Предложение 1. Всякий ненулевой проектор в $B(\mathbb{C}^2)$ ($f \neq 1$) имеет вид

$$f = \begin{pmatrix} a & z \\ \bar{z} & 1-a \end{pmatrix}, \text{ где } 0 \leq a \leq 1, a \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}, |z| = \sqrt{a-a^2}.$$

В вещественном случае имеем.

Предложение 2. Всякий ненулевой проектор f в $B(\mathbb{R}^2)$ ($f \neq 1$) имеет вид

$$f = \begin{pmatrix} a & \pm\sqrt{a-a^2} \\ \pm\sqrt{a-a^2} & 1-a \end{pmatrix}, \text{ где } 0 \leq a \leq 1, a \in \mathbb{R}.$$

Известно, что кватернионное число $x = a + bi + cj + dk \in \mathbf{H}$ можно представить, как вещественная матрица следующего вида:

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

Это соответствие является *-изоморфное вложение из $\mathbf{H}$ в $B(\mathbb{C}^4)$. Легко видеть, что $x \in \mathbf{H}$ является проектором тогда и только тогда, когда $x = \theta$ или $x = 1$.

$$\left\| \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right\|^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\xi^2 + \eta^2 + \lambda^2 + \mu^2),$$

$$\forall a, b, c, d, \xi, \eta, \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Замечание. Из определения проектора вытекает, что нулевой оператор θ и единичный оператор $\mathbf{1}$ являются проекторами.

Литература

1. Li Bing-Ren, Real operator algebras, World. Sci. Pub.Co. Pte. Ltd. 2003. 241p.
2. Li Bing-Ren, Introduction to operator algebras, World. Sci. Pub.Co. Pte. Ltd. 1992. 736p.