

СВОЙСТВА M – ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Омонов Олим Исокович,

Ражабов Улутбек Туйчиевич,

Манзаров Нурули Муродуллаевич,

Исмоилова Махбуба Хамиджонова

Ташкентский государственный педагогический университет Узбекистан;

e-mail: o.i.omonov@mail.ru

Аннотация

В этой статье доказано, что если $u(z)$ – гармоническая и $u^4(z)$ – M – гармоническая функции в единичном шаре, то $u^4(z)$ является плюригармонической.

Ключевые слова: голоморфная функция, вещественно-аналитическая функция, гармоническая функция, n – гармоническая функция, субгармоническая функция, плюригармоническая функция, плурисубгармоническая функция, M – гармоническая функция, M – субгармоническая функция.

Annotation. In this paper it is proved, if the $u(z)$ function of the unit ball is subharmonic and $u^4(z)$ M – harmonic, then $u^4(z)$ is pluriharmonic.

Key words: holomorphic function, real-analytic function, harmonic function, n – harmonic function, subharmonic function, pluriharmonic function, M – harmonic function, plurisubharmonic function, M – subharmonic function.

Функция $u \in C^2(D)$ называется плюригармонической в D , если она удовлетворяет следующим n^2 дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Предположим, B – открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$ с центром в начале координат ($B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$, $\partial B = \{\omega \in \mathbb{C}^n : |\omega| = 1\}$), $\varphi_a(z)$ – дробно-линейное биголоморфное отображение шара B на себя следующего вида:

$$\varphi_a(z) = \frac{a - P_a(z) - (1 - |a|^2)^{\frac{1}{2}} (z - P_a(z))}{1 - \langle z, a \rangle}.$$

При $a \in B$, $a \neq 0$, $\varphi_a(0) = a$, $\varphi_a(a) = 0$, $\varphi_0(z) = -z$, где угловые скобки обозначают эрмитово скалярное произведение

$$\langle z, w \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + z_3 \bar{w}_3 + \dots + z_n \bar{w}_n = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i, \quad |z| = \langle z, z \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad \text{и} \quad P_a(z) = \frac{\langle z, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a, \quad a \neq 0,$$

$P_0(z) = 0$. Очевидно, что $\varphi_a(0) = a$, $\varphi_a(a) = 0$.

Инвариантный оператор Лапласа $\tilde{\Delta}$ функций на дважды гладких в B определяется следующим образом:

$$\tilde{\Delta} f(z) = \Delta(f \circ \varphi_z)(0)$$

где $z \in B$, Δ – обычный лапласиан.

Оператор $\tilde{\Delta}$ называется инвариантным, потому что он коммутирует с автоморфизмами шара B в следующем смысле (см. [2] стр.54-66): $\tilde{\Delta}(f \circ \varphi) = (\tilde{\Delta} f) \circ \varphi$, где $f \in C^2(G)$ ($G \subset B$), а φ – любой биголоморфный автоморфизм шара B .

Если $G = \{z \in \mathbb{B}^n : \langle z, a \rangle \neq 1\}$, то φ_a голоморфно отображает G в $\mathbb{B}^n$. Ясно, что $G \supset \bar{B}$, так как $|a| < 1$.

Дважды непрерывно дифференцируемая на открытом множестве $D \subset B$ функция $f(z)$ называется M – гармонической (M – субгармонической) в D , если для каждого z из D выполняется равенство $\tilde{\Delta} f = 0$ ($\tilde{\Delta} f \geq 0$). Известно также (см. [2] стр.54-66) что

$$\tilde{\Delta} f = 4(1 - |z|^2) \sum_{j,k=1}^n (\delta_{jk} - z_j \bar{z}_k) \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k},$$

где $\delta_{jk} = 0$ при $j \neq k$, $\delta_{jj} = 1$.

Если $f(z)$ функция M – гармоническая, то (по теореме 4.2.5 (см. [2] стр.54-66)) она вещественно аналитично в B , поэтому $\Delta f(z)$ тоже вещественно аналитично и, значит, $\Delta f(z) = 0$ во всем на B .

Теорема. Пусть B – единичный шар в $\mathbb{B}^n$ и $u(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

- а) функция $u(z)$ гармоническая в B ;
- б) функция $u^4(z)$ M – гармоническая в B .

Тогда $u^4(z)$ плюригармоническая в B .

Литература

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ Ч. 2. М. Наука. 1976.-321 с.
2. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. // М. Мир. 1984.-457 с.
3. Rudin W. Pluriharmonic function in balls // Proceedings of the American Mathematical Society. 1977, V.62, №1, pp. 44-46.
4. M. Stoll, Invariant potential theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, London Mathematical Society Lecture Note Series, 199. Cambridge University Press, Cambridge. 2003.-181.
5. Hong Oh Kim M –harmonic functions with M –harmonic square Austral. Math. Soc Vol 53(1996) [123-129].
6. Мадрахимов Р.М., Вайсова М.Д. Критерии плюригармоничности гармонических функций // ДАН РУз. – Ташкент, 2008. – №5. – С. 19 -20.
7. Мадрахимов Р.М., Омонов О.И. Плюригармоничность M – гармонических функций // “Ilm sarchashmalari”. – Urganch, 2018. – №12. – С. 12 -14.
8. Ismoilov E.O. Tools aimed at developing students' professional competence on the basis of an integrative approach // European Journal of Humanities and Educational Advancements (EJHEA) (ISSN 2660-5589) (Journal impact factor 7.223). – Spain, 2022. Volume 3, № 4, April 2022. – p. 34-42.
9. Ismoilov E.O. The content and methodological features of an integrated approach to the formation of professional competencies in students // Eurasian Scientific Herald (ISSN 2795-7365) (Journal impact factor 8.225). – Belgium, 2022. Volume 7, April 2022. – p. 109-114.