СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОЙ ОСОБОЙ СИСТЕМЫ СОСТАВНОГО ТИПА С КОЭФФИЦИЕНТОМ ЧЕБЫШЕВА-ЛАГЕРРА

И.Ф.Сраждинов,
Н.Т.Душатов,
З.М.Миратоев
(Алмалыкский филиал Ташкентского государственного технического университета)
e-mail: israjdinov@bk.ru, n_dushatov@rambler.ru, miratoyev2014@mail.ru

Работа посвящена вопросу разрешимости смешанной задачи для одной системы второго порядка составного типа с коэффициентом Чебышева-Лагерра. Системы составного типа со специальными коэффициентами до сих пор почти не исследованы. Смешанная задача для системы составного типа с коэффициентом Лагранжа и Чебышева-Эрмита исследована в [1,2]. Следуя [3] (см. также [4]), доказывается разрешимость рассматриваемой задачи. Найдены условия обеспечивающие существование и единственность решения. Найдены явные решения в виде разложения в ряды по полиномам Чебышева-Лагерра. Доказывается равномерная сходимость рядов представляющих решение, а также рядов полученных в результате однократного и двукратного дифференцирования их по t и x. По исследованиям одного скалярного уравнения составного типа см. [5-7], а для систем составного типа см. [8], а также [10-12].

Пусть $U = U(t,x)$ и $V = V(t,x)$ вещественные функции переменных t и x. $a \neq 0$ -действительное число. Рассмотрим следующую систему второго порядка :

$$\begin{cases} U_{tt} + x^{-\alpha} e^{x} \left(x^{\alpha+1} e^{-x} U'_x \right)'_x = aV, \\ V_{tt} - x^{-\alpha} e^{-x} \left(x^{\alpha+1} e^{-x} V'_x \right)'_x = aU. \end{cases} \tag{1}$$

Задача $S_{чл}$.. *Найти дважды непрерывно–дифференцируемое по x и t, квдратично-интегрируемое по x с весом* $\rho(x) = x^{\alpha} e^{-x}$ *решение системы (1) в области* $\Omega = \{(t,x) : 0 < x < +\infty, t \geq 0\}$, *ограниченное при* $t \to \infty$ *и удовлетворяющее*
следующим начальным условиям:

$$\begin{cases} U(0,x)=\phi(x) \\ V(0,x)=\psi(x) \end{cases},$$

(2)

Будем искать решение данной задачи, как мы уже заметили выше, методом разделения переменных.

$U(t,x)=T(t)X(x)$,$V(t,x)=\theta(t)X(x)$, $0<x<+\infty$, $t\ge 0$. Подставляя в систему, после некоторых простых вычислений, получаем:

$$T^{IV}-(a^2+\lambda^2)T=0$$

Таким образом, имеем задачу: *Найти значения параметра* λ *и отвечающие им решения уравнения*

$$\frac{d}{dx}(x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dX}{dx})+\lambda x^{\alpha}e^{x}X=0$$

(3)

непрерывные и квадратично-интегрируемые с весом $\rho(x)=x^{\alpha}e^{-x}$ *на промежутке* $[0,+\infty)$.

Как известно$[9, стр.322]$ в этом случае:

$$\lambda_n=n$$

$$X_n(x)=L_n^{\alpha}(x)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^{x}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x})$$

(4)

$L_n^{\alpha}(x)-$ многочлен Чебышева-Лагерра.

Для уравнения (2):

$$k^4-\left(a^2+n^2\right)=0 \;\Rightarrow\; k_1(a,n)=\sqrt[4]{a^2+n^2}, \quad k_2=-k_1, \quad k_3=ik_1,$$

$$k_1\approx n^{\frac{1}{2}}$$

Поэтому имеем:

$$T(t)=C_1e^{k_1t}+C_2e^{-k_1t}+C_3Cosk_1t+C_4Sink_1t$$

и поэтому

$$\theta(t)=\frac{1}{a}(T''-\lambda T)=\frac{1}{a}\left[(k_1^2-n)(C_1e^{k_1t}+C_2e^{-k_1t})-(k_1^2+n)(C_3Cosk_1t+C_4Sink_1t)\right]$$

$$C_1=\frac{k_1^2+2n}{4k_1^2}\left[T_n(0)+\frac{1}{k_1}T_n'(0)\right]+\frac{a}{4k_1^2}\left[\theta_n(0)+\frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right]$$

$$C_2=\frac{k_1^2+2n}{4k_1^2}\left[T_n(0)-\frac{1}{k_1}T_n'(0)\right]+\frac{a}{4k_1^2}\left[\theta_n(0)-\frac{1}{k_1}\theta_n'(0)\right]$$

$$C_3 = \frac{k_1^2 - 2n}{2k_1^2} T(0) - \frac{a}{2k_1^2} \theta(0)$$

$$C_4 = \frac{k_1^2 - 2n}{2k_1^3} T_n'(0) - \frac{a}{2k_1^3} \theta_n'(0)$$

Ограниченность решения при $t \to \infty$ **обеспечивается условием** $C_1 = 0 \Rightarrow$ $T_n(0) = -\frac{1}{k_1} T_n'(0)$, $\theta_n(0) = -\frac{1}{k_1} \theta_n'(0)$.

Доказывается теорема о существовании и единственности решения данной задачи.

Литература

1.1.Сраждинов И.Ф. Доклады академии наук Республики Узбекистан.5,2016, стр.7-10.
2.Сраждинов, И. (2021). Смешанная Задача Для Одной Особой Системы Составного Типа С Коэффициентом Чебышева-Эрмита. *CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES*, *2*(10), 47-52.
3.3.Ильин В.А. Успехи математических наук, 1960, т.15,вып.2(92),стр.97-154.
4.4.Алимов Ш.А. Избранные научные труды, Ташкент, 2015, изд. Мериюс, 286стр.
5.5.Кожанов А.И.,Пинигина Н.Р. Краевые задачи для некоторых классических уравнений составного типа высокого порядка. Сиб. электрон. матем.изв. 12(2015),стр.842-853.
6.6.Хашимов А.Р. Нелокальная задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа с общим краевым условием.Вест.Самарс.Техн.Ун-та,Сер.Физ-мат.наук,№1(24),2020,стр.187-198.
7.7.Зикиров О.С. Вестник ЮУрГУ, Серия Математика, Механика, Физика., 2016, том8, №2, стр.19-26.
8.Джураев А.Д. Методы сингулярных интегральных уравнений, Москва, Наука,1987,415стр.
9.9.Арсенин В.Я.Методы математической физики и специальные функции, Москва,Наука,1984,383с.
10.Fayzudinovich, S. I. (2021). To Investigation of The Mixed Problem For Systems of Equations of Compound Type. *CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL & APPLIED SCIENCES*, *2*(4), 23-32.

11. Сраждинов, И. Ф. (2021). Начально-краевая задача для одной системы составного типа. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 2(3), 41-47.
12. Муминов, Ф. М., Душатов, Н. Т., Миратоев, З. М., & Ибодуллаева, М. Ш. (2022). ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, *2*(6), 606-612.
13. Муминов, Ф. М., Душатов, Н. Т., Миратоев, З. М., & Сулхонов, Д. А. (2022). КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 2(6), 552-557.
14. Muminov, F. M., Dushatov, N. T., & Miratoev, Z. M. (2022). Boundary Problem for a Third Order Equation of a Mixed Composite Type. Eurasian Journal of Physics, Chemistry and Mathematics, 5, 12-16.
15. Муминов, Ф. М., Самандаров, И. Р., Душатов, Н. Т., & Миратоев, З. М. (2022). КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 2(4), 218-224.