

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ФЛАТТЕРА ДЛЯ ГИБКИХ ВЯЗКОУПРУГИХ УДЛЕНЁННЫХ ПЛАСТИН

М. М. Мансуров

ТГТУ Кокандский филиал

Рассмотрим вынужденные колебания гибких вязкоупругих удленённых пластин.

Согласно [1] основные разрешающие уравнение в безразмерных координатах запишется в виде

$$W_{tt} + \alpha_1 \left\{ (1-R^*) W_{xxxx} + 12\lambda^2 (1-R^*) \int_0^1 W dx - 6(1-R^*) W_{xx} \int_0^1 W_x^2 dx + 12\lambda W_{xx} (1-R^*) \int_0^1 W dx - 6\lambda (1-R^*) \int_0^1 W_x^2 dx \right\} = z_0 \alpha_1 \bar{q}(x, t) \quad (1)$$

где

$$W = \frac{\bar{W}}{h}, \quad x = \frac{\bar{x}}{a}, \quad \lambda = \frac{a^2}{Rh}, \quad t = \frac{\bar{t}}{t_1}, \quad t_1 = \sqrt{\frac{12(1-\mu^2)\rho a^4 \alpha_1}{Eh^3}}, \quad z_0 = \frac{12(1-\mu^2)a^4 q_0}{Eh^4},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{(\theta N \pi)^4}, \quad q(x, t) = \frac{\bar{q}(x, t)}{q_0}$$

При движении удлинённой конструкции в потоке газа, возложено возникновение динамической неустойчивости конструкции – флаттера, который проявляется в быстром нарастании амплитуд колебаний. Для исследование данного явление согласно поршневой теорией Ильюшина в качестве $q(x, t)$ принимаем аэродинамическую нагрузку, т.е.

$$q(x, t) = \Delta p - p_c - BW_t + BVW_x - B_1 V^2 W_x^2$$

где $p_c = -\frac{\rho_c V_\infty^2}{ad} \int_0^a W dx, \quad B = \frac{\chi p_\infty}{V_\infty}, \quad B_1 = \frac{\chi(\chi+1)p_\infty}{4V_\infty^2}$

$\Delta p = \text{const}$ – статический перепад давлений, остальное обозначение приняты из [1]. Тогда в (1) $\bar{q}(x, t)$ принимает вид (при $q_0 = p_\infty$)

$$\bar{q}(x, t) = \frac{\Delta p}{p_\infty} + \lambda_c \left(\frac{a}{d} \right) \int_0^1 W dx - MW_t + M_1 M^* W_x - M_2 M^{*2} W_x^2 \quad (2)$$

Здесь $\lambda_c = \rho_c V_\infty^2 \left(\frac{h}{a} \right), \quad M = \frac{\chi h}{V_\infty t_1}, \quad M_1 = \chi \left(\frac{h}{a} \right), \quad M^* = \left(\frac{V}{V_\infty} \right),$

$$M_2 = \frac{\chi+1}{4\chi} M_1^2, \quad z_0 = \frac{12(1-\mu^2)a_4 p_\infty}{Eh^4}$$

Решим уравнение (1) при начальных:

$$W|_{t=0} = W_0(x), \quad W_t|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

и граничных условиях:

$$W|_{x=0} = 0, \quad W_{xx}|_{x=1} = 0 \quad (4)$$

Решение уравнение (1) ищем в виде

$$W(x,t) = \sum_{i=1}^N U_i(t) \varphi_i(x) \quad (5)$$

где $\varphi_i(x) = \sin i\pi x$ – известные координатные функции, удовлетворяющее всем граничным условиям для $W(x,t)$.

Подставляя (5) в (1) учитывая (2), (3) и (4) согласно метода Бубнова – Галёркина будем иметь:

$$\begin{aligned} \ddot{U}_j(t) + \left(\frac{j}{N}\right)^4 (1-R^*) U_j(t) + \frac{96\lambda^2 \alpha_j}{jN^4 \pi^6} \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{i} (1-R^*) U_i(t) + \frac{3j^2}{N^4} U_j(t) \sum_{i=1}^N i^2 (1-R^*) U_i^2(t) - \\ - \frac{24\lambda j^2}{N^4 \pi^6} U_j(t) \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{i} (1-R^*) U_i(t) - \frac{12\lambda \alpha_j}{jN^4 \pi^3} \sum_{i=1}^N i^2 (1-R^*) U_i^2(t) = z_0 \alpha_1 \left\{ \frac{4\Delta p \alpha_j}{j p_\infty \pi} + 8\lambda_c \left(\frac{a}{d}\right) \frac{\alpha_j}{j\pi^2} \times \right. \\ \times \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{i} U_i(t) - M \dot{U}_j(t) + 2M_1 M^* \sum_{i=1}^N i U_i(t) \left[\frac{\alpha_{j-i}}{j-i} + \frac{\alpha_{j+i}}{j+i} \right] - M_2 M^{*2} \pi \sum_{i,s=1}^N i s U_i(t) U_s(t) \times \\ \left. \times \left[\frac{\alpha_{j-i+s}}{j-i+s} + \frac{\alpha_{j+i-s}}{j+i-s} - \frac{\alpha_{j-i-s}}{j-i-s} - \frac{\alpha_{j+i+s}}{j+i+s} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } \alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{если } i - \text{нечетная} \\ 0 & \text{если } i - \text{четная или } i = 0 \end{cases}$$

Решение этой системы находим численным методом предложенным в [2]. Расчет произведен как в идеально упругой, так и вязкоупругой постановках. Численные результаты приведены в виде графиков и таблиц.

Литература

1. Бадалов Ф.Б. Метод степенных рядов в нелинейной наследственной теории вязкоупругости. Т., Фан, 1980
2. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро – дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Т., Мехнат, 1987
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., Наука, 1972.