РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СОСТАВНОГО ТИПА

Сраждинов И.Ф.
Душатов Н.Т.,
Миратоев З.М.
israjdinov@bk.ru, n_
dushatov@rambler.ru,
miratoyev2014@mail.ru
Алмалыкский филиал Ташкентского государственного технического университета, г. Алмалык, Узбекистан

Пусть $U = U(t,x)$ и $V = V(t,x)$ вещественные функции действительных переменных t и x. Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} U_{tt} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(aU + bV) = aV, \\ V_{tt} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(aV - bU) = aU. \end{cases} \tag{1}$$

Данная система имеет характеристическую форму $\sigma(\tau,\xi) = \tau^4 - (a^2 + b^2)\xi^4$ и поэтому является системой составного (эллиптико - гиперболического) типа при выполнении следующего:
Условие-1. *В системе (1) a и b - одновременно не равные нулю положительные постоянные.*

В работе В. А. Ильина [1] (см. также [2]) исследована смешанная задача для уравнений гиперболического и параболического типов. Основной целью данной работы является исследование аналогичной задачи для системы (1). Кроме того при исследовании систем составного типа до сих пор [3,4,5] в смешанной задаче начальные условия задавались, как отдельные уравнения эллиптического и гиперболического типов. В данной работе начальные условия ставятся с учетом взаимосвязанности компонент системы и ограниченности решения системы при $t \to \infty$, т.е. в новой постановке. В настоящее время проводятся исследования также одного скалярного уравнения составного типа [6,7,8,9]. См. также [10-12].

Пусть $D = \{(t,x): 0 < x < l, t > 0\}$, $r = 0,1;$ $j = 0,1.$

Теорема 1. *Условие-1 является необходимым и достаточным условием существования и единственности решения системы (1).*

Задача $S_{rj}(D)$. Найти решение системы (1) ограниченное по t при $t \to \infty$ удовлетворяющей следующим начальным

$$\begin{cases} rU(0,x) + (1-r)U'(0,x) = \varphi(x), \\ jV(0,x) + (1-j)V'(0,x) = \psi(x). \end{cases} \tag{2}$$

и краевым условиям

$$U(t,0) = U(t,l) = V(t,0) = V(t,l) = 0 \ . \tag{3}$$

Таким образом имеем задачи $S_{11}(D)$, $S_{10}(D)$, $S_{01}(D)$, $S_{00}(D)$. Следуя [1,2], разделяем переменные $U(t,x) = T(t)X(x)$, $V(t,x) = \theta(t)X(x)$ и $X'' = -\lambda^2 X$, $X(0) = X(l) = 0$ производя некоторые преобразования относительно $T(t)$ получаем уравнение $T^{IV} - \left[(a+\lambda^2 b)^2 + \lambda^4 a^2\right]T = 0 \Rightarrow k^4 - \left[(a+\lambda^2 b)^2 + \lambda^4 a^2\right] = 0$. Через $A(a,b,\lambda)$ -обозначим выражение в квадратной скобке. $k_1 = \sqrt[4]{A}$, $k_2 = -k_1, k_3 = ik_1$, $k_4 = ik_1$; Обозначим $k_1 = k_n$; $\alpha_n^{\pm} = \dfrac{k_n^2 \pm \lambda_n^2 a}{a + \lambda_n^2 b}$;

$\alpha_n^+ + \alpha_n^- = \dfrac{2k_n^2}{a+\lambda_n^2 b}$; $\alpha_n^+ - \alpha_n^- = \dfrac{2\lambda_n^2 a}{a+\lambda_n^2 b}$; Поэтому $T_n(t) = C_1 e^{k_n t} + C_2 e^{-k_n t} + C_3 \cos k_n t + C_4 \sin k_n t$;

$\theta_n(t) = \dfrac{k^2{}_n - \lambda_n^2 a}{a+\lambda_n^2 b}\left(C_1 e^{k_n t} + C_2 e^{-k_n t}\right) - \dfrac{k^2{}_1 + \lambda_n^2 a}{a+\lambda_n^2 b}\left(C_3 \cos k_n t + C_4 \sin k_n t\right)$. Задавая $T_n(0)$, $T_n'(0)$, $\theta_n(0)$, $\theta_n'(0)$ получаем систему четырех алгебраических уравнений относительно $C_1,\, C_2, C_3$ и C_4 . Имеем $U(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$; $V(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_n(t) X_n(x)$.

Обозначим через $C_0^{m+\nu}(D)$ класс функций обладающих непрерывными проитзводными m -го порядка с кусочно-непрерывными производными $m+1$ -го порядка (0<ν <1).

Теорема $S_{11}(D)$. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x) \in C_0^{3+\nu}(D)$. *Тогда ряды (4) удовлетворяют системе (1), начальным условиям (2), краевым условиям (3). При этом ряды (4) можно дифференцировать по* t *и* x *дважды и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно.*

Доказаны также теоремы $S_{10}(D), S_{01}(D), S_{00}(D)$;

Литература.

1. В.А.Ильин. Успехи математических наук, 1960, т.15,вып.2(92),стр.97-154.
2. Ш.А.Алимов. Избранные научные труды, Ташкент, 2015, изд. Мериюс, 286стр.
3. А.Д.Джураев. Методы сингулярных интегральных уравнений. М., Наука, 1987, 415стр.
4. И.Ф.Сраждинов. О разрешимости смешанныв задач для систем составного типа.Uzbek mathematical journal, 2010,№3, pp.121-130.
5. И.Ф.Сраждинов. Об одной системе уравнений составного типа в многомерных пространствах. ДАН Респ.Таджикистан,1980,том 23,№2,стр.66-69.
6. А.И.Кожанов,Н.Р.Пинигина.Краевые задачи для некоторых классических уравнений составного типа высокого порядка.Сиб.электрон.матем.изв.12(2015),стр.842-853.
7. А.Р.Хашимов. Нелокальная задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа с общим краевым условием.Вест.Самарс.Техн.Ун-та,Сер.Физ-мат.наук,№1(24),2020,стр.187-198.
8. О.С.Зикиров. Вестник ЮУрГУ, Серия Математика,Механика,Физика.,2016,том8,№2,стр.19-26.
9. Ф М Муминов, З М Миратоев, У А Утабов. Об Одной Краевой Задаче Для Уровнениясоставного Типа Третьего Порядка CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL & APPLIED SCIENCES 2021/4/8 том2, №4 стр 17-22
10. И.Ф.Сраждинов.Доклады академии наук Республики Узбекистан, 5, 2016, стр.7-10.
11. ФМ Муминов, ЗМ Миратоев О нелокальной краевой задаче для одного неклассического уравнения. Scientific progress 2021 том1, №6 стр 922-927.
12. Муминов Ф.М., Душатов Н.Т. Нелокальная краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Central Asian Journal of Theoretical and Applied Sciences, 2021. Vol.02, Issue:05, стр.191-196.