AYRIM ANIQMAS TENGLAMALAR VA ULARNI YECHISH USULLARI HAQIDA

Bobonazarov Azizjon Komiljon o‘g‘li
Qo‘qon DPI talaba

Annotatsiya
Ushbu maqolada ayrim aniqmas tenglamalar va ularni yechishda birinchi va ikkinchi daragali bitta ikki o‘zgaruvchili tenglamalar sinflarga ajratilib yechish usullari misollar yordamida ko‘rsatib berilgan.

Kalit so‘zlar: aniqmas tenglama, yechim, koeffisiyent, modul, natural son, tub son, juft son, butun son, sistema.

Ma’lumki, birdan ortiq noma’lumlarni o‘z ichiga oluvchi tenglama aniqmas tenglama, noma’lumlar soni tenglamalar sonidan ko‘p tenglamalar sistemasini aniqmas tenglamalar sistemasi deyiladi. Aniqmas tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega. Odatda aniqmas tenglamalarni butun sonlardagi yechimlari qaraladi. Avval birinchi darajali ikki o‘zgaruvchili tenglamalarni butun sonlarda yechishni ko‘rib o‘tamiz. Bunday tenglamalarning umumiy ko‘rinishi: $ax+by=c$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bunda a,b,c - berilgan sonlar, x va y lar faqat butun sonlarni qabul qiladigan o‘zgaruvchilardir. Bunday tenglamalarni butun sonlarning xossasidan foydalanib yechish ham mumkin.

1-misol. Ushbu $5x-7y=3$ tenglamani butun sonlarda yeching.

Yechish. Noma’lumlar ichida koeffisiyenti moduli kichigini topib olamiz.

$$5x=7y+3; \;\; x=\frac{7y+3}{5}$$

$$x=\frac{5y+(2y+3)}{5}=y+\frac{2y+3}{5}$$

$\frac{2y+3}{5}$ kasr butun songa teng bo‘lishi kerak. $\frac{2y+3}{5}=Z$, $Z\in Z$. U holda $2y+3=5z$. yangi ikki o‘zgaruvchili birinchi darajali tenglama hosil bo‘ldi. Bu tenglamaning yana moduli bo‘yicha koeffisiyenti kichik o‘zgaruvchisini ajratib olamiz:

$$2y=5z-3, \; y=\frac{5z-3}{2}=\frac{6z-z-3}{2}=3z-\frac{z+3}{2}$$

Bu jarayon o‘zgaruvchilardan birining koeffisiyenti 1 yoki -1ga teng bo‘lguncha davom etadi

$$\frac{z+3}{2}=t, \;\; z+3=2t, \;\; z=2t-3,, \; t\in Z.$$

Endi y va x ni t orqali ifodalaymiz.

$$y = 3z - \frac{z+3}{2} = 3(2t-3) - t = 5t - 9,$$

$$x = y + \frac{2y+3}{5} = y + z = (5t-9) + (2t-3) = 7t - 12$$

Biz $x = 7t - 12, y = 5t - 9$ formulani hosil qilamiz. Bu formula berilga tenglamaning butun sonlardagi hamma yechimlarini topish imkonini beradi. Masalan, t ga $0{,}1$ va 2 qiymatlarini berib, tenglamaning xususiy $(-12;-9), (-5;-4)$, $(2;1)$ yechimlarni hosil qilamiz.

Javob: $x = 7t - 12, y = 5t - 9$; $t \in Z$.

Ushbu

$$ax + by = c$$

tenglamada, a, b, c - berilgan butun sonlar uchun ikki hol bo‘lishi mumkin:

1) Bu tenglama butun x va y larda yechimga ega bo‘lmaydi. Bu holat c son $|a|$ va $|b|$ larning eng katta umumiy bo‘luvchilariga bo‘linmaganda bo‘ladi.

2) Bu tenglama butun sonlarda cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Bu holat c soni $|a|$ va $|b|$ larning eng katta umumiy bo‘luvchilariga bo‘linganda yoki xususiy holda $|a|$ va $|b|$ lar o‘zaro tub bo‘lganda bo‘ladi.

Ba’zi hollarda bunday tenglamalarni natural sonlarda yechish talab qilinadi. Bunda tenglama butun sonlarda yechiladi va hosil bo‘lgan yechimlar to‘plamidan natural sonlardagi yechilari ajratib olinadi.

2-misol. Ushbu

$$65x - 43y = 2$$

tenglamani natural sonlarda yeching.

Yechish. Avval tenglamani yuqorida ko‘rgan misolimizni yechish usuliga ko‘ra butun sonlarda yechamiz. Bunda $x = 4 - 43t, y = 6 - 65t$.

Endi x va y lar musbat bo‘ladigan t larni topamiz

$$\begin{cases} 4 - 43t > 0, \\ 6 - 65t > 0 \end{cases}$$

Bundan $t < \frac{6}{65}$. Bu tengsizlikni hamma musbat bo‘lmagan t sonlari qanoatlantiradi.

Javob: $x = 4 - 43t, y = 6 - 65t$, $t = 0, -1, -2, \ldots$

Endi ikki o‘zgaruvchili 2-darajali tenglamalarini butun sonlarda yechishni ko‘rib o‘tamiz. Bunday tenglamalarning umumiy ko‘rinishi quyidagicha:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Bunda a, b, c, d, e, f – berilgan sonlar, a, b, c larning hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli. Bu oltita koeffisiyentlarning hammasi butun sonlar bo‘lsin. Bunday tenglamalarni x va y

butun sonlarda yechishni ko‘rib o‘tamiz. Avval o‘zgaruvchilarning kavdratlari qatnashmagan tenglamalarni yechishni qaraymiz.

3-misol. Ushbu $xy = x + y$ tenglamani x va y butun sonlarda yeching.

Yechish.1-usul: y ni x orqali ifodalaymiz

$$xy - y = x,\ y(x-1) = x,\ y = \frac{x}{x-1},\ y = \frac{(x-1)+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

Bundan $x-1=1$ yoki $x-1=-1$. Agar $x-1=1$ bo‘lsa, $x=2,\ y=1+\frac{1}{1}=2$. Agar $x-1=-1$ bo‘lsa, $x=0,\ y=1-\frac{1}{1}=0$

2-usul. Berilgan tenglamani

$$xy - x - y = 0,\ x(y-1) - y = 0,\ x(y-1) - y + 1 = 1,\ (y-1)(x-1) = 1$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Ikkita butun son ko‘paytmasi 1 bo‘lishi uchun ularning ikkalasi ham 1 yoki –1 ga teng bo‘lishi kerak.

$$\begin{cases} x-1=1, \\ y-1=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=-1, \\ y-1=-1. \end{cases}$$

Birinchi sistemadan $x = y = 2$, ikkinchi sistemadan $x = y = 0$.

Javob: $(2;2),(0;0)$

4-misol. Ushbu $3xy + y = 7x + 3$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamadan y ni x orqali ifodalaymiz.

$$y = \frac{7x+3}{3x+1}$$

Kasrning butun qismini ajratish uchun uning har ikki tomonini 3 ga ko‘paytiramiz.

$$3y = \frac{21x+9}{3x+1} = \frac{(21x+7)+2}{3x+1} = 7 + \frac{2}{3x+1}$$

Bundan $3x+1$ faqat $-2,-1,1$ va 2 larni qabul qilishi mumkin.

Javob: $(0;3),(-1;2)$

Endi 2-darajali ikki o‘zgaruvchili, o‘zgaruvchilarning biri kvadrati bilan qatnashadigan tenglamalarni yechishga misollar ko‘rib chiqamiz.

5-misol. Ushbu $2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$ tenglamani butun sonlarda yeching.

Yechish. Tenglamada faqat birinchi darajasi bilan qatnashadigan noma’lumni jaratib olamiz.

$$2x^2 + 9x - 2 = 2xy - y,\ y = \frac{2x^2 + 9x - 2}{2x-1}$$

Oxirgi kasrning butun qismini ajratamiz. Bunda ko‘phadni ko‘phadga bo‘lish usulidan foydalansak ham bo‘ladi:

$$y = x + 5 + \frac{3}{2x-1}$$

$2x-1$ ayirma faqat $-3,-1,1$ va 3 larni qabul qilishi mumkin.

Javob: $(1;9),(2;8),(0;2),(-1;3)$.

6-misol. Ushbu $x^2 + 2xy = 2002$ tenglamani butun sonlarda yeching.

Yechish. Tenglamani quyidagi ko‘rinishga keltirib olamiz:

$$(x+y)^2 - y^2 = 2002$$

Bunda $x+y$ va y ning juft toqliklari bir xil bo‘lishi kerak. Ammo juft toqligi bir xil bo‘lgan ikkita kvadratlar ayirmasi 4 ga bo‘linadi, 2002 esa bo‘linmaydi.

Javob: Z sonlarda yechib bo‘lmaydi.

Endi har ikkala noma`lumlar kvadratlari bilan qatnashgan tenglamalarni yechishni ko‘rib o‘tamiz.

7-misol. Ushbu $x^2 - y^2 = 1997$ tenglamani butun sonlarda yeching.

Yechish. Tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$(x+y)(x-y) = 1997$$

1997 soni tub son bo‘lganligi uchun quyidagi 4 ta holat bo‘lishi mumkin.

$$\begin{cases} x+y=1997, \\ x-y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=1, \\ x-y=1997; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-1997, \\ x-y=-1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-1, \\ x-y=-1997. \end{cases}$$

Bu sistemalarni yechib tenglamaning javobini hosil qilamiz.

Javob: $(999;998),(999;-998),(-999;-998),(-999;998)$

8-misol. Ushbu $x^2 - xy + y^2 = x + y$ tenglamani butun sonlarda yeching.

Yechish. Yuqoridagi misolni yechganimizda qo‘llagan usul bilan bu tenglamani yechib bo‘lmaydi. Tenglamaning hamma hadlarini chap tomonga o‘tkazib x ning darajalari bo‘yicha joylashtiramiz:

$$x^2 - (y+1)x + (y^2 - y) = 0$$

Oxirgi tenglamani x ga nisbatan kvadrat tenglama qilib yechamiz. Uning yechimi D ga bog‘liq bo‘ladi. U biror t butun sonning kvadrati bo‘lishi kerak

$$D = (y+1)^2 - 4(y^2 - y) = t^2, \quad y^2 + 2y + 1 - 4y^2 + 4y = t^2, -3y^2 + 6y + 1 = t^2$$

Biz yangi 2-darajali 2 o‘zgaruvchili tenglamani hosil qildik. Bu tenglama berilgan tenglamaga nisbatan qisqaroqdir.Tenglamaning hamma hadlarini bir tomonga o‘tkazib

$$3y^2 - 6y - 1 + t^2 = 0$$

tenglamani hosil qilamiz.

$$3\left(y^2-2y\right)-1+t^2=0,\ 3\left(\left(y^2-2y+1\right)-1\right)-1+t^2=0,$$

$$3\left(y-1\right)^2-3-1+t^2=0,\ \ 3\left(y-1\right)^2+t^2=4.$$

Oxirgi tenglamadan $t^2\le 4,\ \ |t|\le 2.$ t ning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlarini tanlab yechamiz.

1) Agar $t^2=0$ bo‘lsa, $3\left(y-1\right)^2=4$. Bu y ning butun qiymatida mumkin bo‘lmagan holdir.

2) Agar $t^2=1$ bo‘lsa,

$$3\left(y-1\right)^2=3,\ \left(y-1\right)^2=1,\ y-1=\pm 1;\ y_1=2,\ y_2=0$$

$y=2$ ni kvadrat tenglamaga qo‘yamiz.

$$x^2-3x+2=0,\ x_1=1,\ x_2=2$$

Bunda $(1;2)$ va $(2;2)$ yechimlarni hosil qilamiz. Xuddi shunday $y=0$ da yechimlarni topamiz.

$$x^2-x=0;\ \ x_1=0,\ x_2=1$$

Bunda $(0;0)$ va $(1;0)$ yechimlarni hosil qilamiz

1) Agar $t^2=4$ bo‘lsa,

$$3\left(y-1\right)^2=0,\ y=1$$

$$x^2-2x=0;\ x_1=0,\ x_2=2$$

Bunda $(0;1)$ va $(2;1)$ yechimlarni hosil qilamiz.

Javob: $(1;2),(2;2),(0;0),(1;0),(0;1),(2;1)$.

9-misol. Ushbu $\left(x+y\right)^2=x-y$ tenglamani butun sonlarda yeching.

Yechish. $x+y=t\,,t\in Z$ bo‘lsa, $x-y=t^2$ bo‘ladi.Natijada quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} x+y=t, \\ x-y=t^2. \end{cases}$$

Tenglamalarni qo‘shib va ayirib $x=\dfrac{t\left(t+1\right)}{2};\ \ y=\dfrac{t\left(1-t\right)}{2}$ ni hosil qilamiz. Bunda t ixtiyoriy butun sonlarni qabul qiladimi? degan savolga javob beramiz. Hosil bo‘lgan kasrlar butun sonlardir, chunki ularning surati juftdir. Bundan tashqari topilgan x va y larni berilgan tenglamaga qo‘ysak ayniyat hosil bo‘ladi. Demak t ixtiyoriy butun son ekan, shuning uchun tenglama butun sonlarda cheksiz ko‘p yechimga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Sh.N. Ismailov. “Sonlar nazariyasi” – Toshkent, “O‘qituvchi” NMIU, 2008 y.
2. A.S. Yunusov, S.I.Afonina va boshqalar “Qiziqarli matematika va olimpiada masalalari” Akademik litsey, kasb-hunar kollejlari uchun o‘quv qo‘llanma. Toshkent “O‘qituvchi”, 2007

3. Е.В. Галкин. “Нестандартные задачи по математике. Алгебра”. Челябинск «Взгляд», 2004 г.

4. И.Ф. Шарыгин. “Факультативный курс по математике” 10 класс. Москва «Просвещение», 1989 г.