KOSHINING INTEGRAL FORMULASI VA UNING TATBIQLARI

G`affarova Dilfuza Shavkat qizi
(NDPI o`qituvchi)

ANNOTATSIYA. Ushbu maqola ba`zi analitik (golomorf) funksiyalarning integralini hisoblashda Koshining integral formulasidan foydalanib topishga bag`ishlangan.

TAYANCH SO`ZLAR. Golomorf funksiya, yopiq kontur, Koshi teoremasi, Koshining integral formulasi.

Kompleks analiz kursidan ma`lumki Koshi teoremasi kompleks o`zgaruvchili funksiyalar nazariyasining fundamental teoremasi hisoblanadi. Biz Koshining integral formulasini keltirishimizdan avval Koshi teoremasin keltirib o`tishimiz kerak.

1-teorema (Koshi teoremasi). Agar $f(z)$ funksiya bir bog‘lamli D sohada $(D \subset \mathbb{C}_z)$ golomorf bo`lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning $D$ sohada yotuvchi har qanday silliq (bo`lakli silliq) γ yopiq chiziq (yopiq kontur) bo`yicha integrali nolga teng bo`ladi:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Biz bu teoremadan quyidagi natijaga ega bo`lamiz:

1-natija: Agar $f(z)$ funksiya bir bog`lamli $D$ sohada $(D \subset C_z)$ golomorf bo`lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning integrali integrallash egri chizig`iga (integrallash yo`liga) bog`liq bo`lmaydi, ya`ni boshlang`ich va oxirgi nuqtalari umumiy hamda D sohada yotuvchi γ_1 va γ_2 egri chiziqlar uchun

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

bo`ladi.

Endi Koshi teoremasining umumlashishini ifodalovchi teoremalarni keltirib o`tamiz

Aytaylik, D $(D \subset \mathbb{C}_z)$ chegaralangan bir bog`lamli soha bo`lib, uning chegarasi δD silliq (bo`lakli silliq) yopiq egri chiziqdan iborat bo`lsin.

2-teorema. Agar $f(z)$ funksiya bir bog`lamli $D$ sohada golomorf bo`lib, δD da uzliksiz bo`lsa, u holda

$$\int_{\delta D} f(z)dz = 0$$

bo`ladi. Bu yerda $\delta D$ ning yo`nalishi musbat yo`nalish.

Faraz qilaylik, D $(D \subset C_z)$ va o`zaro kesishmaydigan $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, silliq (bo`lakli silliq) yopiq egri chiziqlar bilan chegaralangan ko`p bog`lamli soha bo`lsin.

Ravshanki D sohaning chegarasi

$$\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup ... \cup \gamma_n$$

bo`ladi, bunda $\gamma_0$ yopiq chiziqda yo`nalish soat strelkasi yo`nalishiga qarshi, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, yopiq chiziqlarda esa yo`nalish soat strelkasi yo`nalishi bo`yicha olinadi.

Odatda bunday yo`nalishda olingan chegara orientirlangan chegara deyiladi.

Uni δD deylik.

3-teorema. Agar $f(z)$ funksiya D sohada golomorf va δD da uzliksiz bo`lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning $\delta D$ bo`yicha integrali nolga teng bo`ladi:

$$\int_{\delta D} f(z)dz = 0$$

Bu ko`p bog`lamli soha uchun Koshi teoremasidir.
Biz Koshi teoremasidan foydalanib kompleks o`zgaruvchili funksiyalar nazariyasida muhim bo`lgan Koshining integral formulasini keltiramiz.
Kompleks sonlar tekisligi $\mathbb{C}_z$ da chegaralangan D sohani qaraylik. Uning chegarasi δD silliq (bo`lakli silliq)chiziqdan iborat. Bu yopiq egri chiziq musbat yo`nalishda olingan bo`lsin. Aytaylik,

$$\bar{D} = D \bigcup \delta D$$

to`plamda $f(z)$ funksiya aniqlangan bo`lsin.
4-teorema (Koshining integral formulasi). Agar $f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo`lib, $\bar{D}$ da uzluksiz bo`lsa, u holda $\forall z \in D$ nuqta uchun

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta D} \frac{f(t)}{t-z} dt \qquad (1)$$

tenglik o`rinli bo`ladi.
Koshining integral formulasi $f(z)$ golomorf funksiyaning D sohadagi qiymatlarini uning chegarasi δD dagi qiymatlari orqali ifodalaydi.
Endi Koshining integral formulasini xususiy holda, chegarasi aylanadan iborat soha uchun keltiramiz.
Kompleks tekislik $\mathbb{C}_z$ da ushbu

$$D = \{z \in \mathbb{C}_z : |z - z_0| < r, r > 0\}$$

doirani $(z_0 \in \mathbb{C}_z)$ qaraylik. Ravshanki, bu doiraning chegarasi

$$\delta D = \{z \in \mathbb{C}_z : |z - z_0| = r, r > 0\}$$

aylana bo`ladi.
Aytaylik, $f(z)$ funksiya

$$\bar{D} = D \bigcup \delta D$$

to`plamda berilgan bo`lsin.
5-teorema. Agar $f(z)$ funksiya D doirada golomorf bo`lib, $\bar{D}$ da uzluksiz bo`lsa, u holda

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{o}^{2\pi} f(z_0 + ze^{i\varphi}) d\varphi \qquad (2)$$

bo`ladi.
6-teorema. Agar $f(z)$ funksiya D sohada $(D \subset \mathbb{C}_z)$ golomorf bo`lsa, u holda $f(z)$ funksiya $D$ da istalgan tartibli hosilaga ega bo`lib,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \quad (n = 1, 2, ...) \qquad (3)$$

bo`ladi.
Bu yerda $\gamma - D$ sohada yotuvchi,(bo`lakli silliq) yopiq chiziq bo`lib, z esa γ chiziq bilan chegaralangan sohaga tegishli nuqta.
Biz Koshining integral formulasini quyidagi misolga tatbiq qilamiz:

Misol: Ushbu

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z+i} dz$$

integralni hisoblang, bunda $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = 4\}$ aylanadan iborat.

Ravshanki, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| < 4\}$ soha hamda $f(z) = \cos z$ funksiya uchun 4-teorema shartlari bajariladi. (1) formulaga ko`ra

$$2\pi i f(a) = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz$$ bo`lib, bundan

$$\int_{|z+i|=4} \frac{\cos z}{z-(-i)} dz = 2\pi i \cos(-i) = 2\pi i \frac{e^{i(-i)} + e^{-i(-i)}}{2} = 2\pi i \frac{e^{1} + e^{-1}}{2} = 2\pi i ch1$$

tenglikka ega bo`lamiz.

Foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati

1. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х., Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред, Т. «Университет», 2012 г. 212 с
2. A.Sa`dullayev, G.Xudoyberganov, Matematik analiz kursidan misol va masalalar to`plami, 3-Tom, Toshkent, “O`zbekiston”2000.
3. Markushevich A.I., Teoriya analiticheskix funksiy, Tom 1, Moskva, “Nauka”, 1968.
4. Markushevich A.I., Teoriya analiticheskix funksiy, Tom 2, Moskva, “Nauka”, 1968.
5. Шабат Б.В., Введение в комплексный анализ, часть 1, М., “Наука”, 1985г.